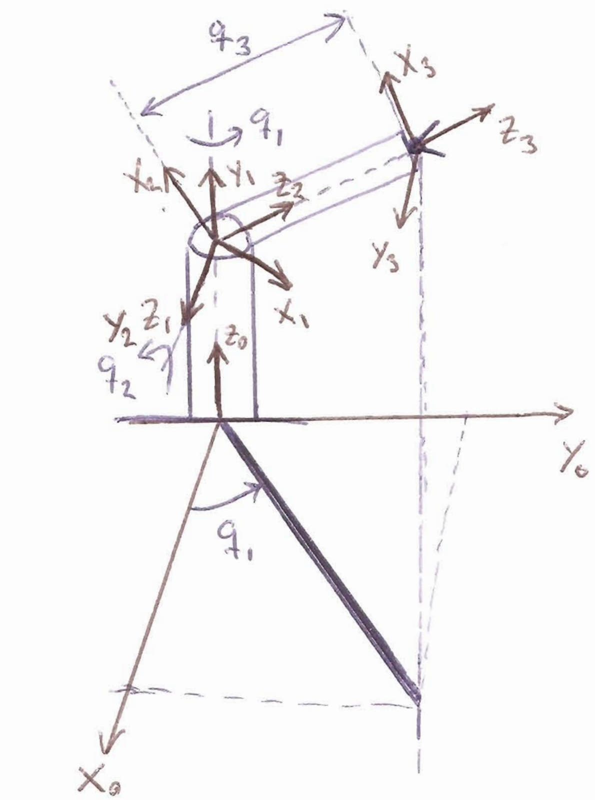
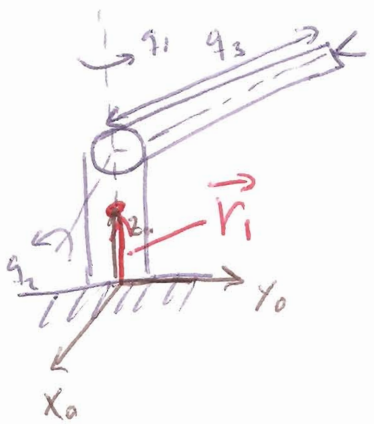
① Hallar las ecuaciones dinámicas del siguiente robot



Primero se colocan los sistemas de referencia. Usaremos la convención de Denavit - Hartenberg para ello.

Luego como tenemos dos cuerpos, entonces habrán dos K_i y dos U_i

Para el primer link:



$$\vec{r}_1 = \frac{L_1}{2}\vec{K}_0$$

$$\vec{W}_1 = \dot{q}_1 \vec{K}_0$$

Como $\vec{r}_1$ está referido al S.R.0 (Sist. Base) $\Rightarrow \vec{V} = \dot{\vec{r}}_1$

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}}_1 = \vec{0}$$

$$K_1 = \cancel{\frac{1}{2} m_1 |\vec{v}_1|^2}^{\,0} + \frac{1}{2}\vec{W}_1^T I_1 \vec{W}_1$$

Aquí es necesario saber si el cuerpo 1 gira sobre su propio eje.

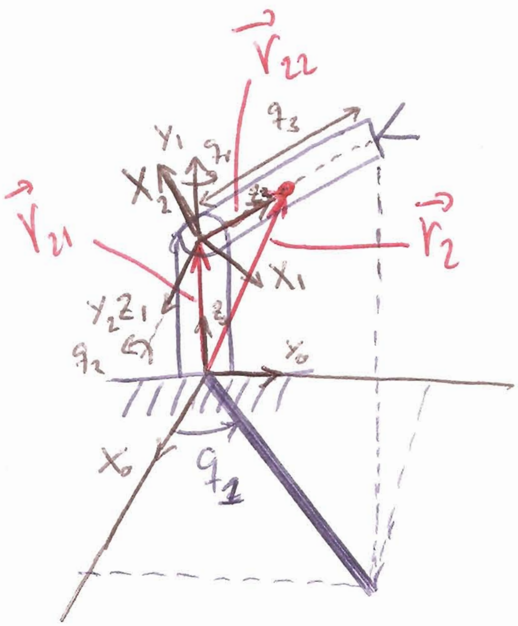
Supongamos que sí $\Rightarrow$

$$K_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx_1}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{K_1 = \frac{1}{2} I_{zz_1}^{(0)} \dot{q}_1^2}$$

$$\boxed{u_1 = m_1 g h_1 \Rightarrow u_1 = m_1 g \frac{L_1}{2}}$$

Para el link 2:



$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{21} + \vec{r}_{22}$$

$$\vec{r}_2 = L_1 \vec{K}_0 + \frac{q_3}{2} \vec{K}_2$$

$$\vec{W}_2 = \dot{q}_1 \vec{K}_0 + \dot{q}_2 \vec{K}_1$$

El error en Clases fue llevar $\vec{r}_{21}$ al Sistema 2.

$\vec{r}_{21}$ es constante siempre

Su derivada debe ser 0

Al llevarlo al Sistema 2 queda una expresión variable cuya derivada es $\neq 0$

Nueva Técnica:

Para $\vec{r}_{21}$ calcularemos $\vec{V}_{21}$

Para $\vec{r}_{22}$ calcularemos $\vec{V}_{22}$

Luego $\vec{V}_2 = \vec{V}_{21} + \vec{V}_{22}$

Para $\vec{r}_{21}$:

$$\vec{V}_{21} = \dot{\vec{r}}_{21} + \vec{W}_{21} \times \vec{r}_{21}$$

$$\vec{W}_{21} = \dot{q}_1 \vec{K}_0$$

$$\vec{V}_{21} = \cancel{\dot{\vec{r}}_{21}}^{0} + \cancel{\dot{q}_1 \vec{K}_0 \times L_1 \vec{K}_0}^{0}$$

$$\vec{V}_{21} = \vec{0}$$

Para $\vec{r}_{22}$:

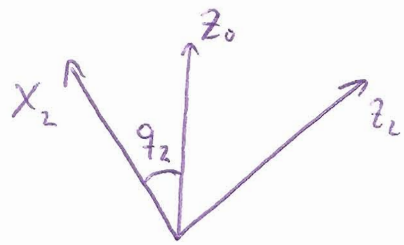
$$\vec{V}_{22} = \dot{\vec{r}}_{22} + \vec{W}_{22} \times \vec{r}_{22}$$

$$\vec{W}_{22} = \dot{q}_1 \vec{K}_0 + \dot{q}_2 \vec{K}_1$$

$$\vec{r}_2 = \frac{q_3}{2}\vec{K}_2$$

Hay que llevar todo a un mismo sistema. Lo llevaremos al sistema 2.

$$\vec{K}_1 = \vec{j}_2$$



$$K_0 = Cq_2\,\vec{i}_2 + Sq_2\,\vec{K}_2$$

$$\vec{W}_{22} = \dot{q}_1 Cq_2 \vec{i}_2 + \dot{q}_1 Sq_2 \vec{K}_2 + \dot{q}_2 \vec{j}_2$$

$$\vec{V}_{22} = \dot{\vec{r}}_{22} + \vec{W}_{22} \times \vec{r}_{22}$$

$$\dot{\vec{r}}_{22} = \frac{\dot{q}_3}{2}\vec{K}_2$$

$$\vec{W}_{22} \times \vec{r}_{22} = \begin{vmatrix} \vec{i}_2 & \vec{j}_2 & \vec{K}_2 \\ \dot{q}_1 Cq_2 & \dot{q}_2 & \dot{q}_1 Sq_2 \\ 0 & 0 & q_3/2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{W}_{22} \times \vec{r}_{22} = \frac{q_3}{2}\dot{q}_2\vec{i}_2 - \frac{q_3}{2}\dot{q}_1 Cq_2 \vec{j}_2$$

$$\vec{V}_{22} = \frac{q_3}{2}\dot{q}_2\vec{i}_2 - \frac{q_3}{2}\dot{q}_1 Cq_2 j_2 + \frac{\dot{q}_3}{2}\vec{K}_2$$

$$\vec{V}_2 = \cancel{\vec{V}_{21}}^{\,0} + \vec{V}_{22}$$

$$|\vec{V}_2|^2 = \frac{q_3^2\dot{q}_2^2}{4} + \frac{q_3^2\dot{q}_1^2 C^2 q_2}{4} + \frac{\dot{q}_3^2}{4}$$

$$K_2 = \frac{1}{2}m_2|\vec{V}_2|^2 + \frac{1}{2}\vec{W}_2^T I_2 \vec{W}_2$$

$\vec{W}_2^T I_2 \vec{W}_2$ es más fácil calcularlo en el sistema 1 que en el 2.

$$\vec{W}_2 = \dot{q}_1\vec{K}_0 + \dot{q}_2\vec{K}_1$$

$$\vec{K}_0 = \vec{j}_1 \Rightarrow \vec{W}_2 = \dot{q}_1\vec{j}_1 + \dot{q}_2\vec{K}_1$$

$$\vec{W}_2 I_2 \vec{W}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{(1)}_{xx_2} & 0 & 0 \\ 0 & I^{(1)}_{yy_2} & 0 \\ 0 & 0 & I^{(1)}_{zz_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{W}_2 I_2 \vec{W}_2 = I^{(1)}_{yy_2}\dot{q}_1^2 + I^{(1)}_{zz_2}\dot{q}_2^2$$

OJO: $\dot{\vec{r}} + \underbrace{\vec{W} \times \vec{r}}$

Prismáticas — rotacionales.

$\vec{r}$ debe ser variable solo por efecto de las articulaciones prismáticas

---

$$\boxed{K_2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{\dot{q}_3^2}{4} + \frac{q_3^2 \dot{q}_2^2}{4} + \dot{q}_1^2 \frac{q_3^2}{4} c^2 q_2 \right) + \frac{1}{2} I_{yy_2}^{(1)} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_{zz_2}^{(1)} \dot{q}_2^2}$$

$$U_2 = m_2 \cdot g \cdot h_2$$

$$\boxed{U_2 = m_2 \cdot g \cdot \left(L_1 + \frac{q_3}{2} c q_2 \right)}$$

$$\mathcal{L} = K_1 + K_2 - U_1 - U_2$$

$$y \quad Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

Para $i=1$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{1}{\cancel{2}} m_2 \cdot \cancel{2} \dot{q}_1 \frac{q_3^2}{4} c^2 q_2 + I_{yy_2}^{(1)} \dot{q}_1 + I_{zz_1}^{(0)} \dot{q}_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{1}{4} m_2 \left(\left(\ddot{q}_1 q_3^2 + \dot{q}_1 \cdot 2 q_3 \dot{q}_3 \right) \cdot c^2 q_2 + \left(-\dot{q}_1 q_3^2 \cdot 2 c q_2 s q_2 \cdot \dot{q}_2 \right) \right) + I_{yy_2}^{(1)} \ddot{q}_1 + I_{zz_1} \ddot{q}_1$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = \emptyset + \emptyset - \emptyset - \emptyset$$

$$\boxed{\tau_1 = \left(\frac{1}{4} m_2 q_3^2 c^2 q_2 + I_{yy_2}^{(1)} + I_{zz_1}^{(0)} \right) \ddot{q}_1 + \frac{1}{2} m_2 c^2 q_2 \cdot q_3 \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_3 - \frac{1}{2} m_2 q_3^2 c q_2 s q_2 \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2}$$

Para $i=2$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = \emptyset + \frac{m_2 q_3^2}{4} \dot{q}_2 + I_{zz_2}^{(1)} \dot{q}_2 - \emptyset - \emptyset$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) = \frac{1}{2} m_2 q_3 \dot{q}_3 \dot{q}_2 + \frac{m_2 q_3^2}{4} \ddot{q}_2 + I_{zz_2}^{(1)} \ddot{q}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = -m_2 \dot{q}_1^2 \frac{q_3^2}{4} c q_2 s q_2 - \left(-m_2 g \frac{q_3}{2} s q_2 \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = -m_2 \frac{q_3^2}{4} c q_2 s q_2 \dot{q}_1^2 + m_2 g \frac{q_3}{2} s q_2$$

$$\boxed{\tau_2 = \left(\frac{m_2 q_3^2}{4} + I_{zz_2}^{(1)}\right)\ddot{q}_2 + \frac{m_2}{2} q_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + m_2 \frac{q_3^2}{4} c q_2 s q_2 \dot{q}_1^2 - m_2 g \frac{q_3}{2} s q_2}$$

Para $i=3$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_3} = \emptyset + m_2 \frac{\dot{q}_3}{4} - 0 - 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_3}\right) = m_2 \frac{\ddot{q}_3}{4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_3} = \emptyset + \frac{m_2}{4} q_3 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{4} m_2 q_3 c^2 q_2 \dot{q}_1^2 - 0 - m_2 g \frac{c q_2}{2}$$

$$\boxed{F_3 = \frac{m_2}{4}\ddot{q}_3 - \frac{1}{4} m_2 q_3 c^2 q_2 \dot{q}_1^2 - \frac{m_2}{4} q_3 \dot{q}_2^2 + m_2 g \frac{c q_2}{2}}$$ //

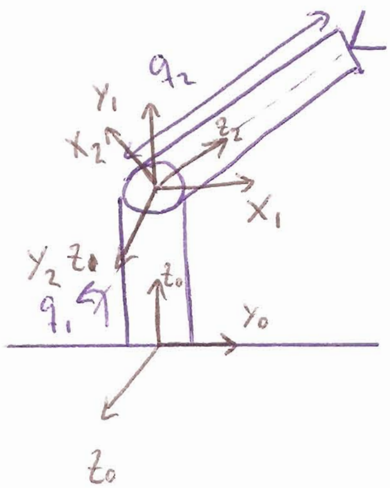
Expresando el resultado matricialmente

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{4} m_2 q_3^2 C^2 q_2 + I_{yy_2}^{(1)} + I_{zz_1}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2}{4} q_3^2 + I_{zz_2}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & m_2/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix}}_{\text{Inercia}} +$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} m_2 q_3^2 C q_2 S q_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} m_2 C^2 q_2 q_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{m_2}{4} q_3 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_2 \dot{q}_3}_{\text{Coriolis}} +$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{m_2 q_3^2}{4} C q_2 S q_2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} m_2 q_3 C^2 q_2 & \frac{m_2 q_3}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \\ \dot{q}_3^2 \end{bmatrix}}_{\text{Fuerzas Centrífugas}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -m_2 \frac{q_3}{2} S q_2 \\ m_2 \, C q_2 / 2 \end{bmatrix} \cdot g}_{\text{Gravedad}}$$

② Mismo Robot con movimiento en el plano.



Primero colocamos los ejes.

Como tenemos dos cuerpos habran dos K_i y dos U_i

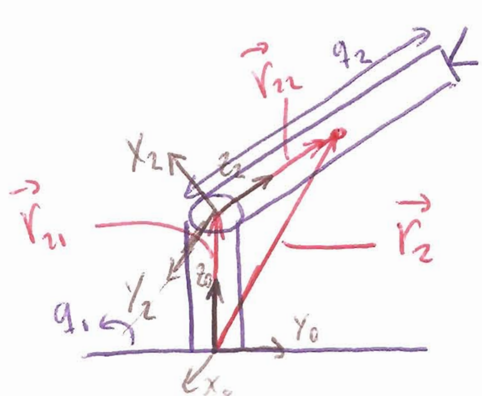
Para el primer link:

Como NO se mueve

$\Rightarrow \boxed{K_i = \emptyset}$

$U_1 = m_1 g \cdot h_1 \Rightarrow \boxed{U_1 = m_1 g \cdot \frac{L_1}{2}}$

Para el link 2.



$\vec{r}_2 = \vec{r}_{21} + \vec{r}_{22}$

$\vec{r}_2 = L_1 K_0 + \frac{q_2}{2} \vec{K}_2$

Para $\vec{r}_{21}$

Como esta en el sistema base:

$\vec{V}_{21} = \dot{\vec{r}}_{21} = \vec{\emptyset}$

Para $\vec{r}_{22}$

$\vec{\omega}_{22} = \dot{q}_1 \vec{K}_1$

$\vec{K}_1 = \vec{j}_2 \Rightarrow \vec{\omega}_{22} = \dot{q}_1 \vec{j}_2$

$\vec{V}_{22} = \dot{\vec{r}}_{22} + \vec{\omega}_{22} \times \vec{r}_{22}$

$\dot{\vec{r}}_{22} = \dot{q}_2/2 \; \vec{K}_2$

$\vec{\omega}_{22} \times \vec{r}_{22} = \dot{q}_1 \vec{j}_2 \times \frac{q_2}{2} \vec{K}_2 = \dot{q}_1 \frac{q_2}{2} \vec{i}_2$

$$\vec V_{22} = \frac{\dot q_2}{2}\vec K_2 + \dot q_1 \frac{q_2}{2}\vec i_2$$

$$\vec V_2 = \cancelto{0}{\vec V_{21}} + \vec V_{22}$$

$$\vec V_2 = \dot q_1\frac{q_2}{2}\vec i_2 + \frac{\dot q_2}{2}\vec K_2$$

$$|\vec V_2|^2 = \dot q_1^2 \frac{q_2^2}{4} + \frac{\dot q_2^2}{4}$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2|\vec V_2|^2 + \frac{1}{2} \vec \omega_2^T I_2 \vec \omega_2$$

$$\vec \omega_2^T I_2\vec \omega_2 = \begin{bmatrix}0 & \dot q_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I^{(2)}_{xx_2}&0&0\\0&I^{(2)}_{yy_2}&0\\0&0&I^{(2)}_{zz_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \dot q_1\\0\end{bmatrix}$$

$$\boxed{K_2 = \frac{1}{2} m_2\left(\dot q_1^2\frac{q_2^2}{4}+\frac{\dot q_2^2}{4}\right)+\frac{1}{2} I^{(2)}_{yy_2}\dot q_1^2}$$

$$U_2 = m_2\cdot g\cdot h_2$$

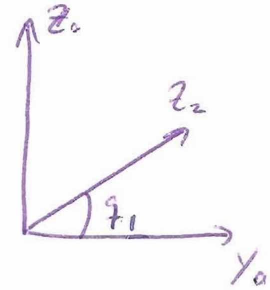
$$\boxed{U_2 = m_2 g\left(L_1 + \frac{q_2}{2}c q_1\right)}$$

$$\mathcal{L} = K_1+K_2-U_1-U_2$$

———— o ————

Si $\vec r_2$ se referencia al sistema base:

$$\vec r_2 = l_1\vec K_0 + \frac{q_2}{2}\vec K_2$$



$$K_2 = c q_1 \vec j_0 + s q_1 \vec K_0$$

$$\vec r_2 = l_1 \vec K_0 + \frac{q_2}{2} c q_1 \vec j_0 + \frac{q_2}{2} s q_1 \vec K_0$$

$$\vec V_2 = \dot{\vec r}_2$$ (No hay $\vec \omega \times \vec r$ porque está referenciado al Sist. Base)

$$\dot{\vec r}_2 = \left(\frac{\dot q_2}{2} c q_1 - \frac{q_2}{2} s q_1 \cdot \dot q_1\right)\vec j_0 + \left(\frac{\dot q_2}{2} s q_1 + \frac{q_2}{2} c q_1\cdot\dot q_1\right)\vec K_0 = \vec V_2$$

$$|\vec V_2|^2 = \left(\frac{\dot q_2}{2}cq_1 - \frac{q_2\dot q_1}{2} s q_1\right)^2 + \left(\frac{\dot q_2}{2}sq_1 + \frac{\dot q_1 q_2}{2}cq_1\right)^2$$

$$\boxed{|V_2|^2 = \frac{\dot q_2^2}{4} + \frac{q_2^2\dot q_1^2}{2}}$$

Resultado similar al anterior

———— o ————

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

Para $i=1$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = 0 + \frac{m_2 \dot{q}_1 q_2^2}{4} + I^{(2)}_{yy_2}\dot{q}_1 - 0 - 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}\right) = \frac{m_2 q_2^2}{4}\ddot{q}_1 + \frac{m_2 q_2}{2}\dot{q}_1\dot{q}_2 + I^{(2)}_{yy_2}\ddot{q}_1$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = 0 + 0 - 0 + m_2 g \frac{q_2}{2} Sq_1$$

$$\boxed{\tau_1 = \left(\frac{m_2 q_2^2}{4} + I^{(2)}_{yy_2}\right)\ddot{q}_1 + \frac{m_2 q_2}{2}\dot{q}_1\dot{q}_2 - m_2\frac{q_2}{2}\cdot Sq_1 \cdot g.}$$

Para $i=2$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = 0 + \frac{m_2}{4}\dot{q}_2 - 0 - 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}\right) = \frac{m_2}{4}\ddot{q}_2$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2}\right) = 0 + \frac{m_2 \dot{q}_1^2 q_2}{4} - 0 - \frac{m_2 g Cq_1}{2}$$

$$\boxed{F_2 = \frac{m_2}{4}\ddot{q}_2 - \frac{m_2 q_2}{4}\dot{q}_1^2 + \frac{m_2 Cq_1}{2}\cdot g}$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix}\tau_1 \\ F_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{m_2 q_2^2}{4} + I^{(2)}_{yy_2} & 0 \\ 0 & \frac{m_2}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2\end{bmatrix}}_{\text{Inercias}} + \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{m_2 q_2}{2} \\ 0\end{bmatrix}\dot{q}_1\dot{q}_2}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0 \\ -\frac{m_2 q_2}{4} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2\end{bmatrix}}_{\text{Fuerzas centrípetas}} + \underbrace{\begin{bmatrix}-m_2\frac{q_2}{2}Sq_1 \\ \frac{m_2}{2}Cq_1\end{bmatrix}g}_{\text{Gravedad}}$$